1 a) $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heeft een vectorruimte structuur.

$\dim(M_{n\times n}(\mathbb{R})) = n^2$, want bijvoorbeeld $\{a_{ij}\}_{ij} = \{\delta_{ij}\}_{ij}$ is een basis.

b) $T: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$M \longmapsto tr(M)$$

$$T(\lambda M) = T(\lambda\{m_{ij}\}_{ij}) = T(\{\lambda m_{ij}\}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda m_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = \lambda T(M)$$

$$T(M + M') = T(\{m_{ij}\}_{ij} + \{m'_{ij}\}_{ij}) = T(\{m_{ij} + m'_{ij}\}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + m'_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} m'_{ii} = T(M) + T(M')$$

c) $T\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, dus $R(T) = \mathbb{R}$, en $\dim(R(T)) = 1$

d) $\dim(N(T)) = n^2 - \dim(R(T)) = n^2 - 1$

e) $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

In dit geval $n=2$, dus $\dim(N(T)) = 3$. Ik moet dus 3 lineair onafhankelijke vectoren in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vinden die onder T op 0 worden afgebeeld. Dat geldt voor $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Deze vectoren vormen dus een basis voor ~~R~~ $N(T)$.

f) Gram-Schmidt orthogonalisatie.

Invullen van de formule.

2 $\quad T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$

$$(a_1,a_2,a_3) \longmapsto (a_1+a_2+a_3) + (a_1-a_2+a_3)x + a_1 x^2$$

a) T is lineair, want

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T((a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)) \\ &= (a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3) + (a_1+b_1-a_2-b_2+a_3+b_3)x \\ &\quad + (a_1+b_1)x^2 \\ &= T(a)+T(b) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} T(\lambda a) &= T(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \\ &= (\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3) + (\lambda a_1 - \lambda a_2 + \lambda a_3)x + \lambda a_1 x^2 \\ &= \lambda \cdot \left((a_1+a_2+a_3) + (a_1-a_2+a_3)x + a_1 x^2 \right) \\ &= \lambda T(a) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

T is injectief, want

$$\begin{aligned} T(a) = 0 + 0\cdot x + 0x^2 &\Longleftrightarrow a_1 = 0 \ \wedge\ a_1+a_2+a_3=0 \ \wedge\ a_1-a_2+a_3=0 \\ &\Longleftrightarrow a_1=0 \ \wedge\ a_2+a_3=0 \ \wedge\ a_3-a_2=0 \\ &\Longleftrightarrow (a_1,a_2,a_3)=(0,0,0) \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat T^{-1} dan ook lineair is.
De ruimtes zijn eindigdimensionaal, dus dan is T ook automatisch surjectief. T is dus een isomorfisme van vectorruimtes

b) De basisvectoren worden als volgt afgebeeld op $P_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= 1+x+x^2 \\ T(0,1,0) &= 1-2x+0\cdot x^2 \\ T(0,0,1) &= 1+x+0\cdot x^2 \end{aligned} \quad , \quad \text{dus } [T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \mapsto r_3 - r_1]{r_2 \mapsto r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \mapsto 3r_3]{r_2 \mapsto r_2 + 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2, r_3 \mapsto \frac{r_2}{3}, \frac{r_3}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right). \quad \text{Dus } [T]_\beta^{\gamma\ -1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

d) $T^{-1} : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\cancel{(a_1,a_2,a_3) \longmapsto \left(\tfrac{1}{3}a_2 + \tfrac{2}{3}a_3\right) + \left(\tfrac{-1}{3}a_2 + \tfrac{1}{3}a_3\right)}$$

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \longmapsto \left(\tfrac{1}{3}a_2 + \tfrac{2}{3}a_3,\ \tfrac{-1}{3}a_2 + \tfrac{1}{3}a_3,\ a_1 - a_3 \right)$$

3 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\text{rang}(A) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$, want dat is logisch.

b) $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{r_1 \mapsto r_1 + r_2 - 2r_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Dus $\left.\begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_4 = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = 3 - 2x_4 \\ x_1 = -3 + x_4 \end{array}$

Kies $x_4 = a \in \mathbb{R}$ ~~Dan~~ willekeurig. Dan is $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+a \\ 3-2a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ een oplossing en alle oplossingen zijn van deze vorm.

Dus $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3+a \\ 3-2a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\dots}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$, Dus $\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array}$, en dus is

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

d) $\dim(V_2) = 1$

4 $T: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$M \longmapsto M^T$$

a) $T(M+M') = T(\{m_{ij}\}_{ij} + \{m'_{ij}\}_{ij}) = T(\{m_{ij}+m'_{ij}\}_{ij}) = \{m_{ji}+m'_{ji}\}_{ij}$

$= \{m_{ji}\}_{ij} + \{m'_{ji}\}_{ij} = T(M) + T(M')$

$T(\lambda M) = T(\lambda\{m_{ij}\}_{ij}) = T(\{\lambda m_{ij}\}_{ij}) = \{\lambda m_{ji}\}_{ij} = \lambda\{m_{ji}\}_{ij} = \lambda T(M)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ M, M' \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

b) Als λ een eigenwaarde is, dan is $T(M) = \lambda M$ en $T(T(M)) = M =$ $T(\lambda M) = \lambda T(M) = \lambda^2 M$ Dus dan moet $\lambda^2 = 1$ en $\lambda = \pm 1$.
Dat dit ook daadwerkelijk eigenwaardes zijn volgt door
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ en $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ te kiezen.

c) $\lambda = 1$: $T(M) = M^T = 1 \cdot M = M$ Dus de vectoren M die hieraan voldoen zijn de symmetrische matrices

e $\lambda = -1$: $T(M) = M^T = -M$. Dus de vectoren M die hieraan voldoen zijn de anti-symmetrische matrices.

d) Schrijf $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$.

$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$, dus in de standaardbasis γ geldt:

$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliseren geeft een basistransformatie die van T een diagonaalvorm maakt. Door deze basistransformatie los te laten op de standaardbasis γ krijg je de gewenste basis.

Je kunt ook in één keer inzien dat de volgende basis voldoet:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$